

## Signal sinusoïdal

$$s(t) = \hat{S} \sin(\omega t + \varphi) = S\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

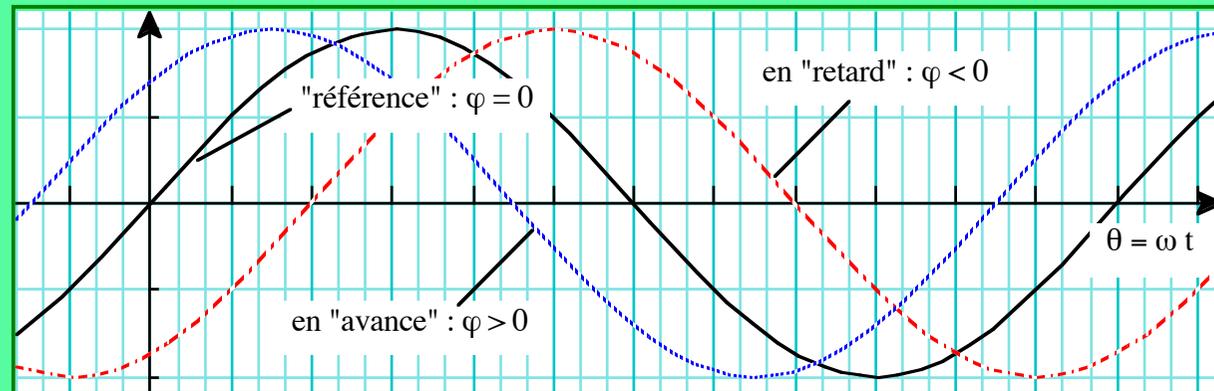
- $\hat{S}$  est la valeur maximale ou **amplitude** du signal : c'est une *valeur positive*;
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  est la **pulsation** en rd/s et  $f$  la **fréquence** en Hertz (Hz);
- $T$  est la **période** (en s) définie par :  $s(t+T) = s(t); \forall t > 0$
- $\omega t + \varphi$  est la **phase instantanée** avec  $\varphi$  **phase à l'origine**;
- $S$  est la valeur **efficace**

## Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

On appelle déphasage de  $s_2$  par rapport à  $s_1$  la différence

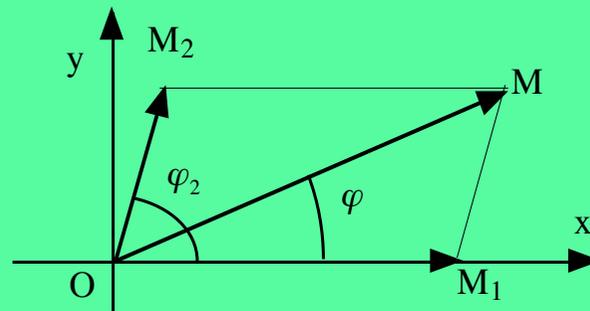
$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$$

Normalement :  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$



## Modélisation graphique d'un signal sinusoïdal : Représentation vectorielle de Fresnel

$$\begin{aligned} S_x &= S_1 + S_2 \cos \varphi_2 \\ S_y &= S_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \|OM\| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{S_y}{S_x} \end{aligned}$$

On associe au signal sinusoïdal  $s(t)$  un vecteur dont la norme est égale à la valeur efficace du signal et l'angle avec l'axe Ox vaut sa phase à l'origine.

## Modélisation graphique d'un signal sinusoïdal : Représentation vectorielle de Fresnel

Exemple de construction :

On donne :

$$\begin{cases} u_1(t) = 24\sqrt{2} \sin \omega t ; u_2(t) = 68 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \\ i_1(t) = 12\sqrt{2} \cos \omega t ; i_2(t) = -14,1 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

On se propose de caractériser :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \text{ ainsi que } \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_1(t) - \mathbf{i}_2(t)$$

## Modélisation graphique d'un signal sinusoïdal : Représentation vectorielle de Fresnel

Exemple de construction :

On donne :

$$\begin{cases} u_1(t) = 24\sqrt{2} \sin \omega t ; u_2(t) = 68 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \\ i_1(t) = 12\sqrt{2} \cos \omega t ; i_2(t) = -14,1 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

On se propose de caractériser :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \text{ ainsi que } \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_1(t) - \mathbf{i}_2(t)$$

On doit d'abord rectifier les écritures afin d'avoir la même convention pour tous les signaux. On obtient :

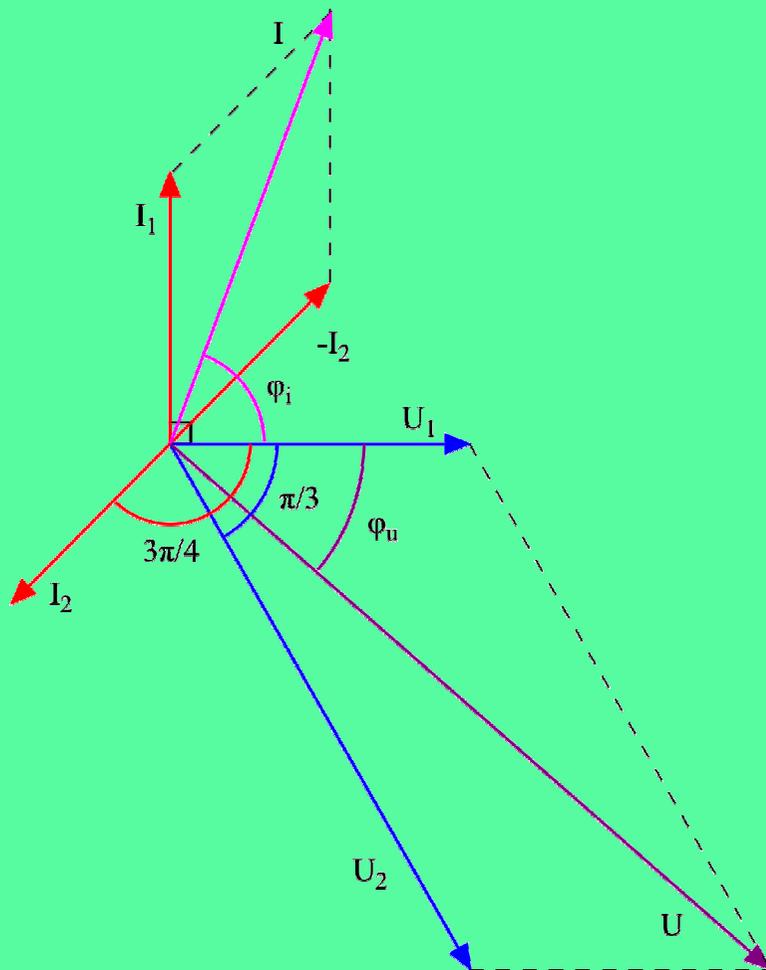
$$\begin{aligned} u_1(t) &= 24\sqrt{2} \sin \omega t ; u_2(t) = 48\sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \\ i_1(t) &= 12\sqrt{2} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) ; i_2(t) = 10\sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

## Modélisation graphique d'un signal sinusoïdal : Représentation vectorielle de Fresnel

Exemple de construction :

On donne :

$$\begin{cases} u_1(t) = 24\sqrt{2} \sin \omega t ; u_2(t) = 68 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \\ i_1(t) = 12\sqrt{2} \cos \omega t ; i_2(t) = -14,1 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$



On se propose de caractériser :

$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  ainsi que  $i(t) = i_1(t) - i_2(t)$

On doit d'abord rectifier les écritures afin d'avoir la même convention pour tous les signaux. On obtient :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 24\sqrt{2} \sin \omega t ; u_2(t) = 48\sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \\ i_1(t) &= 12\sqrt{2} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) ; i_2(t) = 10\sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

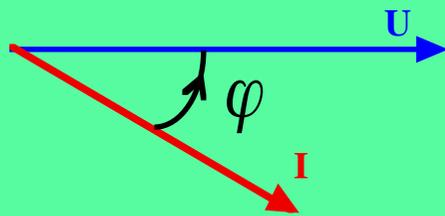
Graphiquement et/ou par le calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} U &= 63,5 \text{ V avec } \varphi_U = -40,9^\circ \\ I &= 20,3 \text{ A avec } \varphi_I = 69,7^\circ \end{aligned}$$

## Impédance d'un récepteur en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal un récepteur se caractérise par :

- Le rapport arithmétique positif des valeurs efficaces  $Z = \frac{U}{I}$
- Le déphasage  $\varphi$  de la tension par rapport au courant, qu'il provoque

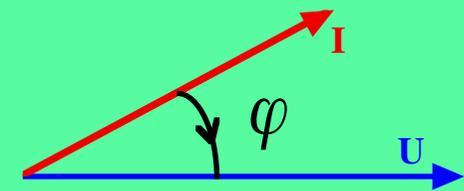


$\varphi > 0$  courant en retard sur la tension



$$u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U}{Z}\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$$



$\varphi < 0$  courant en avance sur la tension

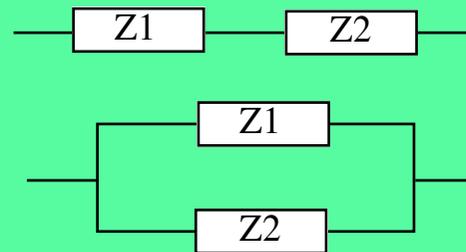
## Impédance complexe d'un récepteur en régime sinusoïdal

En définissant un modèle complexe pour la tension :  $\underline{U} = U \exp(j\varphi_v)$   
ainsi qu'un modèle complexe pour le courant :  $\underline{I} = I \exp(j\varphi_i)$   
on peut définir l'impédance complexe :  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$  nombre complexe dont le module  
et l'argument correspondent aux 2 caractéristiques précédentes.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \exp(j\varphi)$$

### ATTENTION !

Seules les impédances complexes  
vérifient les lois d'association des  
résistances en régime continu



$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

## Impédance des récepteur passifs élémentaires

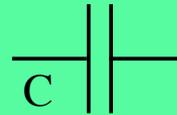
Résistance pure



$$Z = R \text{ et } \varphi = 0$$
$$U = RI ; \underline{Z} = R$$



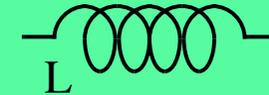
Condensateur parfait



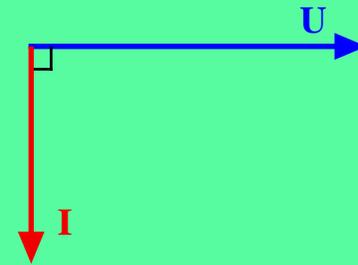
$$Z = \frac{1}{C\omega} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$
$$U = \frac{I}{C\omega} ; \underline{Z} = -j\frac{1}{C\omega}$$



Inductance pure

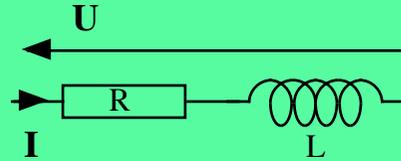


$$Z = L\omega \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$U = L\omega I ; \underline{Z} = jL\omega$$



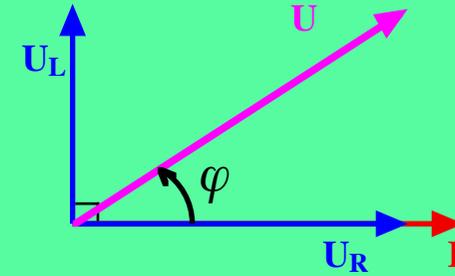
## Groupements usuels : Circuits R - L

R - L série



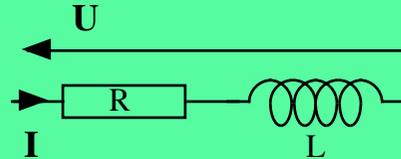
$$\underline{Z} = R + jL\omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$



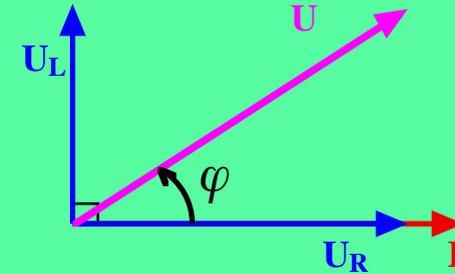
## Groupements usuels : Circuits R - L

**R - L série**

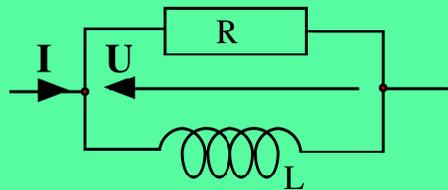


$$\underline{Z} = R + jL\omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

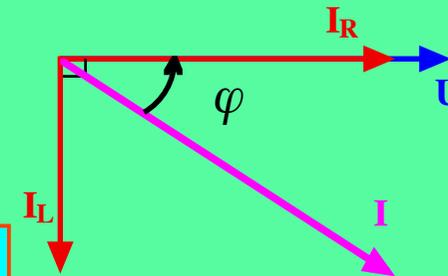


**R - L parallèle**



$$\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{RL\omega(L\omega + jR)}{R^2 + (L\omega)^2}$$

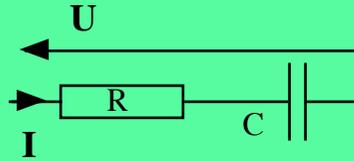
$$Z = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{R}{L\omega}$$



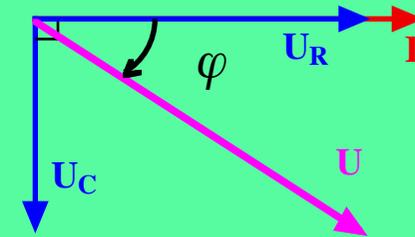
## Groupements usuels : Circuits R - C

R - C série

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{C\omega}$$

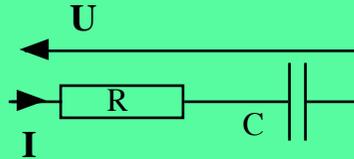


$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{-1}{RC\omega}$$



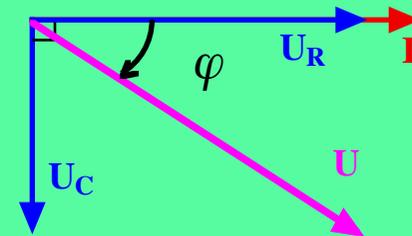
## Groupements usuels : Circuits R - C

R - C série

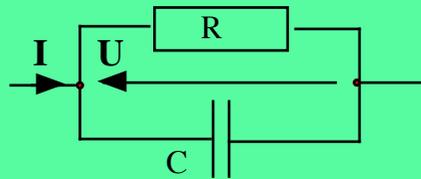


$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{C\omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{-1}{RC\omega}$$

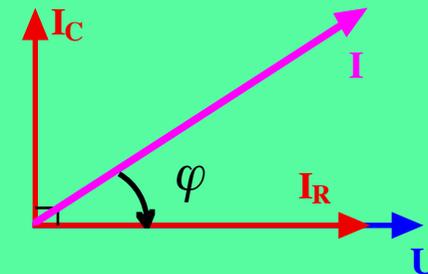


R - C parallèle



$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = -RC\omega$$

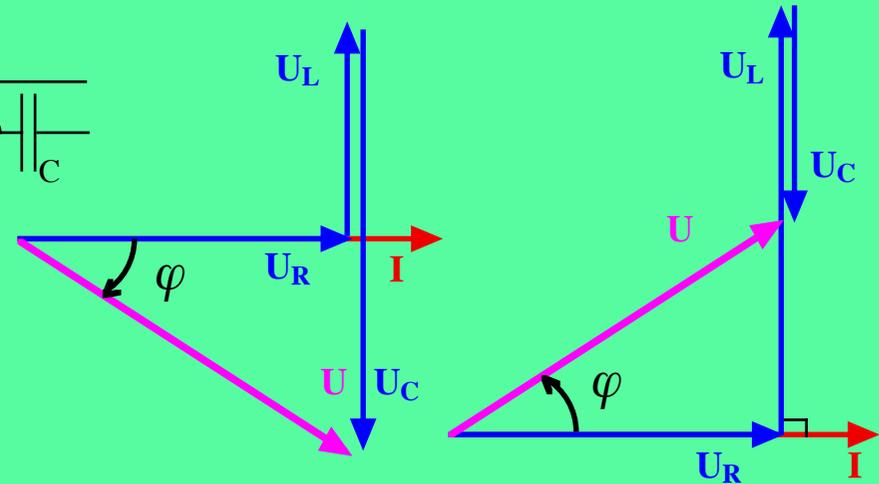
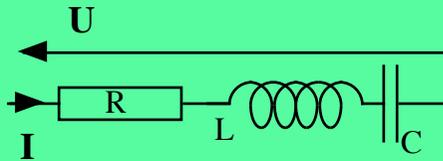


## Groupements usuels : Circuits R - L - C

R - L - C série

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

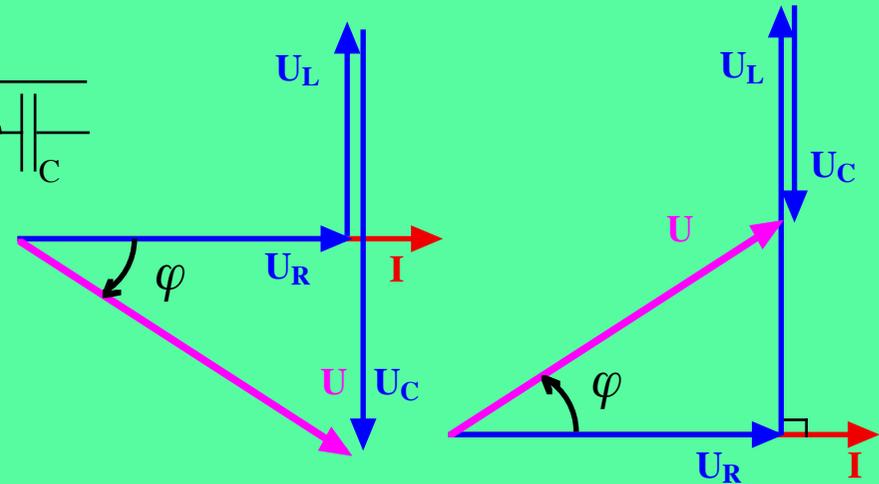
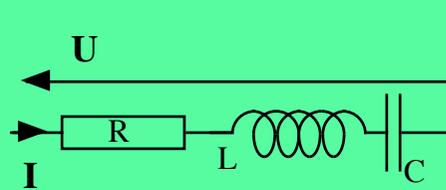


## Groupements usuels : Circuits R - L - C

### R - L - C série

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$



### R - L - C parallèle

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$$

