Caractérisation d'un signal périodique

Décomposition en série de FOURIER : Tout signal continu périodique, de période T, est égal à une somme de sinusoïdes de la forme :

$$s(t) = \bar{S} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \quad avec\ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Où les coefficients se calculent par :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos k\omega t\, dt \quad et \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin k\omega t\, dt$$

En physique, on préfère l'écriture :

$$s(t) = \bar{S} + \sum_1^{\infty} S_k\sqrt{2}\sin(k\omega t - \varphi_k) \quad où\ \ on\ a : S_k = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{\sqrt{2}} \quad et \quad \tan\varphi_k = -\frac{a_k}{b_k}$$

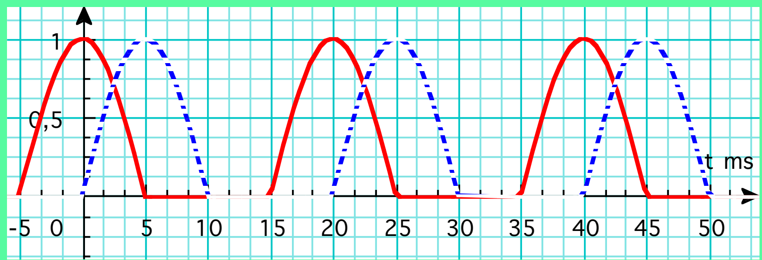
On montre que :

$$S = \sqrt{\bar{S}^2 + \sum_1^{\infty} S_k^{\,2}}$$

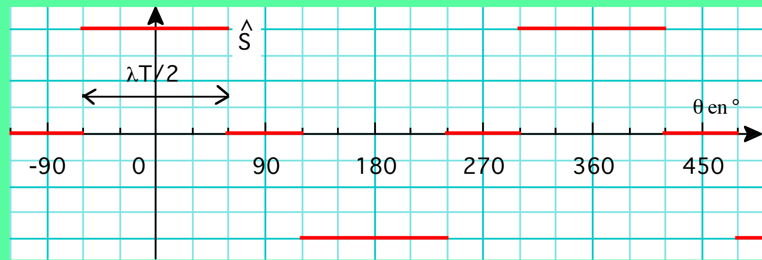
Pour un système linéaire, le régime permanent peut être obtenu en sommant les contributions relatives à chaque harmonique pris séparément.

Caractérisation d'un signal périodique

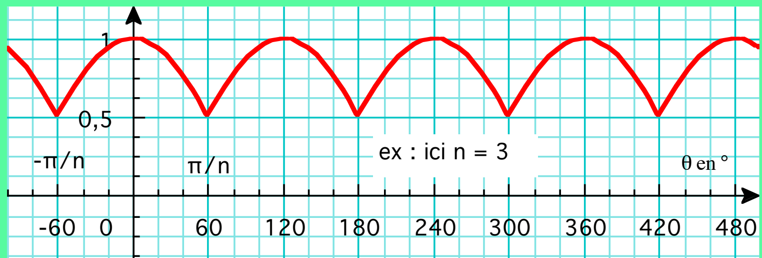
Quelques exemples de décomposition en série de FOURIER



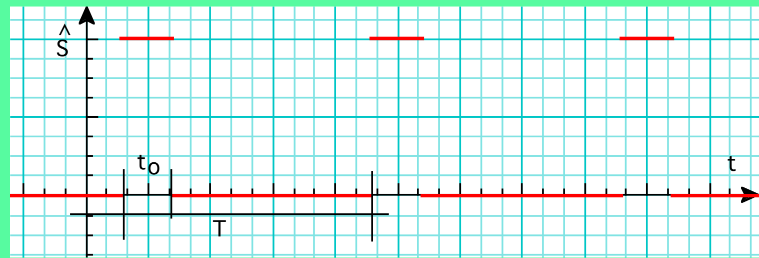
$$s(t) = \frac{\hat{S}}{\pi} + \frac{\hat{S}}{2}\cos\omega t - \frac{2\hat{S}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)}\cos 2k\omega t$$



$$s(t) = \frac{4\hat{S}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)\lambda\frac{\pi}{2}.\cos(2k+1)\omega t$$



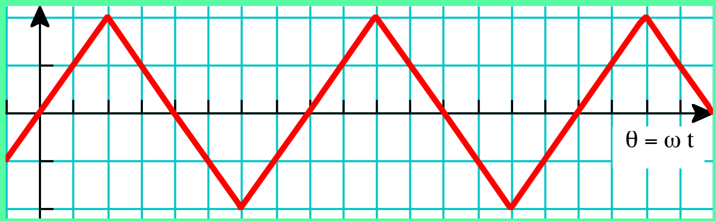
$$s(t) = \frac{n\hat{S}}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(kn-1)(kn+1)}\cos kn\omega t\right)$$



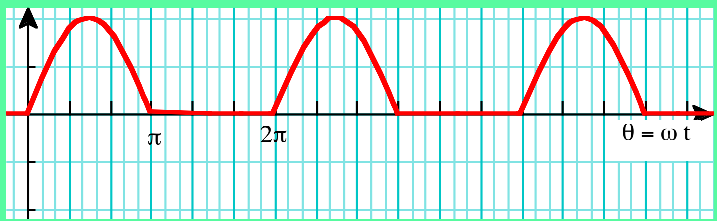
$$\overline{S} = \hat{S}\frac{t_0}{T}\ ;\ S_{eff} = \hat{S}\sqrt{\frac{t_0}{T}} \quad et \quad \hat{S}_k = \frac{2\hat{S}}{k\pi}\sin\left(k\pi\frac{t_0}{T}\right)$$

Signaux périodiques non sinusoïdaux
Quelques exemples

Pour un signal continu pur : $s(t) = \bar{S} = \hat{S} = S$

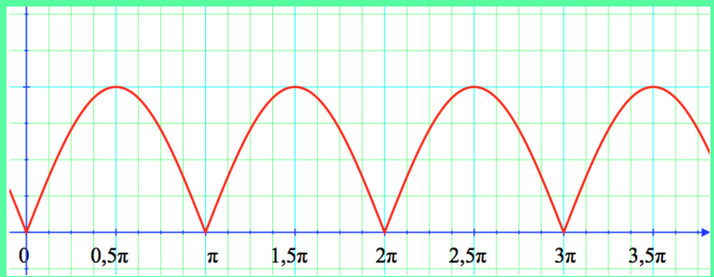


$$\bar{S} = 0 \ ; \ S = \frac{\hat{S}}{\sqrt{3}} \ et \ S_{k+1} = \frac{4\sqrt{2}\,\hat{S}}{\pi^2 (2k+1)^2}$$



$$\bar{S} = \frac{\hat{S}}{\pi} \ ; \ S = \frac{\hat{S}}{2} \ ; \ S_1 = \frac{\hat{S}}{2\sqrt{2}}$$

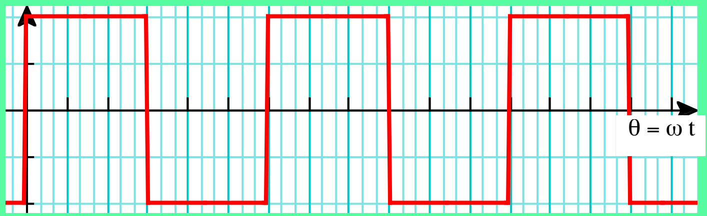
$$S_{k+1} = \frac{\hat{S}\sqrt{2}}{\pi\left(4k^2 - 1\right)} \ avec\ 1 \le k \le \infty$$



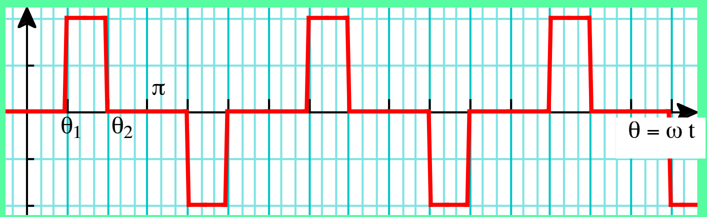
$$S = \frac{\hat{S}}{\sqrt{2}} ; \ \bar{S} = \frac{2\hat{S}}{\pi} ; F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$$

$$S_k = \frac{2\sqrt{2}\ \hat{S}}{\pi\left(4k^2 - 1\right)} \ avec\ 1 \le k \le \infty$$

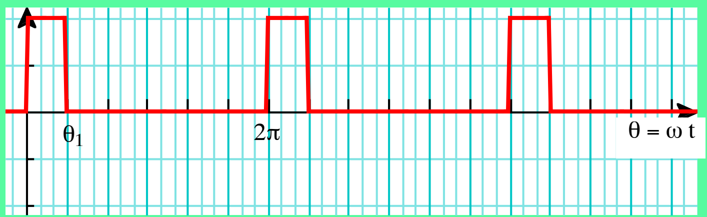
Signaux périodiques non sinusoïdaux
Quelques exemples



$$\overline{S} = 0 \ ; \ S = \hat{S} \ et \ S_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}\ \hat{S}}{\pi(2k+1)}$$



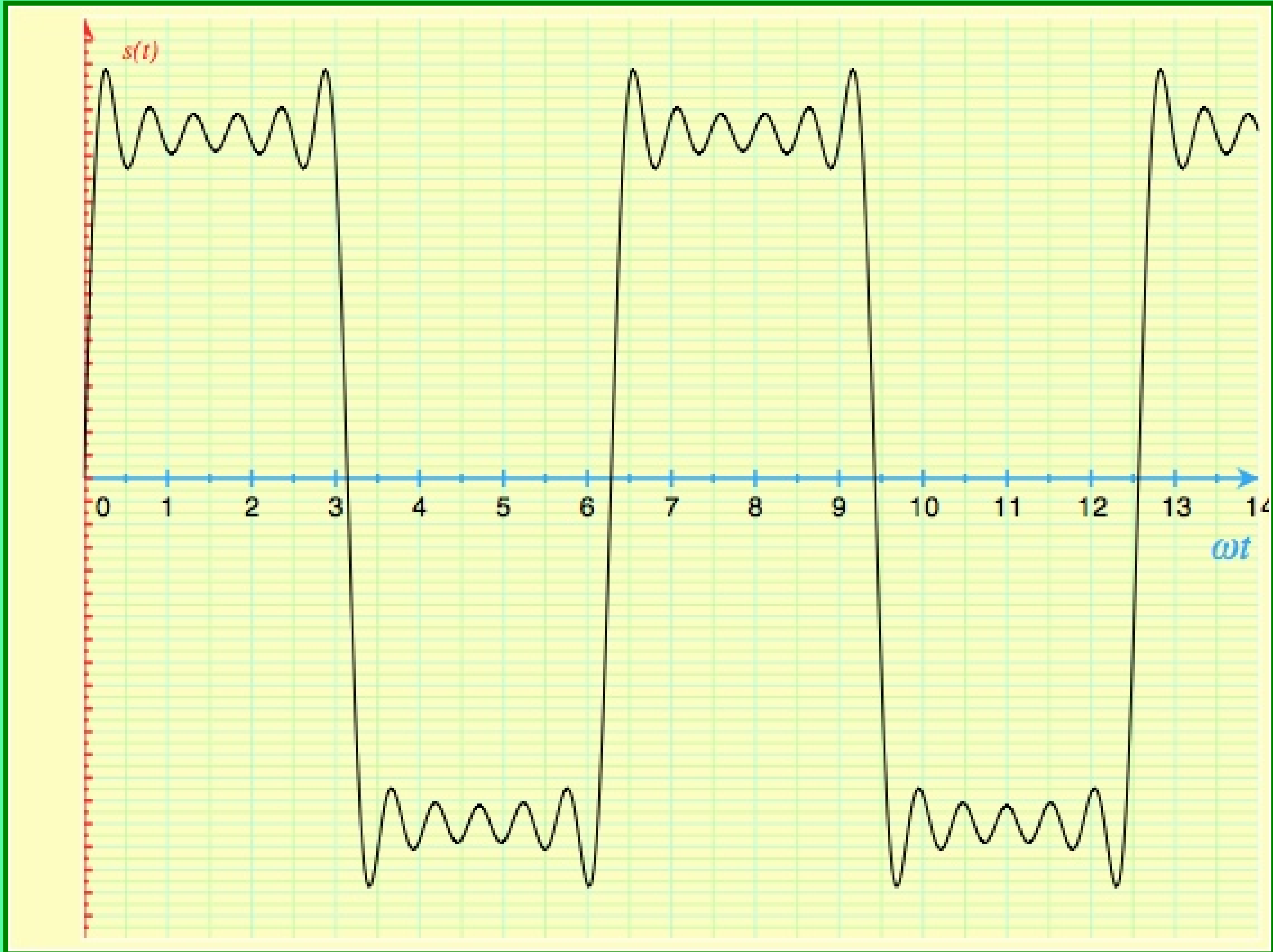
$$\overline{S} = 0 \ ; \ S = \hat{S}\sqrt{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi}} \ et \ S_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}\hat{S}}{\pi(2k+1)}\left|\sin(2k+1)\frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right|$$



$$\overline{S} = \hat{S}\alpha \ ; \ S = \hat{S}\sqrt{\alpha} \ \ et \ \ S_k = \frac{\hat{S}\sqrt{2}}{k\pi}\sin(k\pi\alpha) \ \ avec \ \ \alpha = \frac{\theta_1}{2\pi}$$

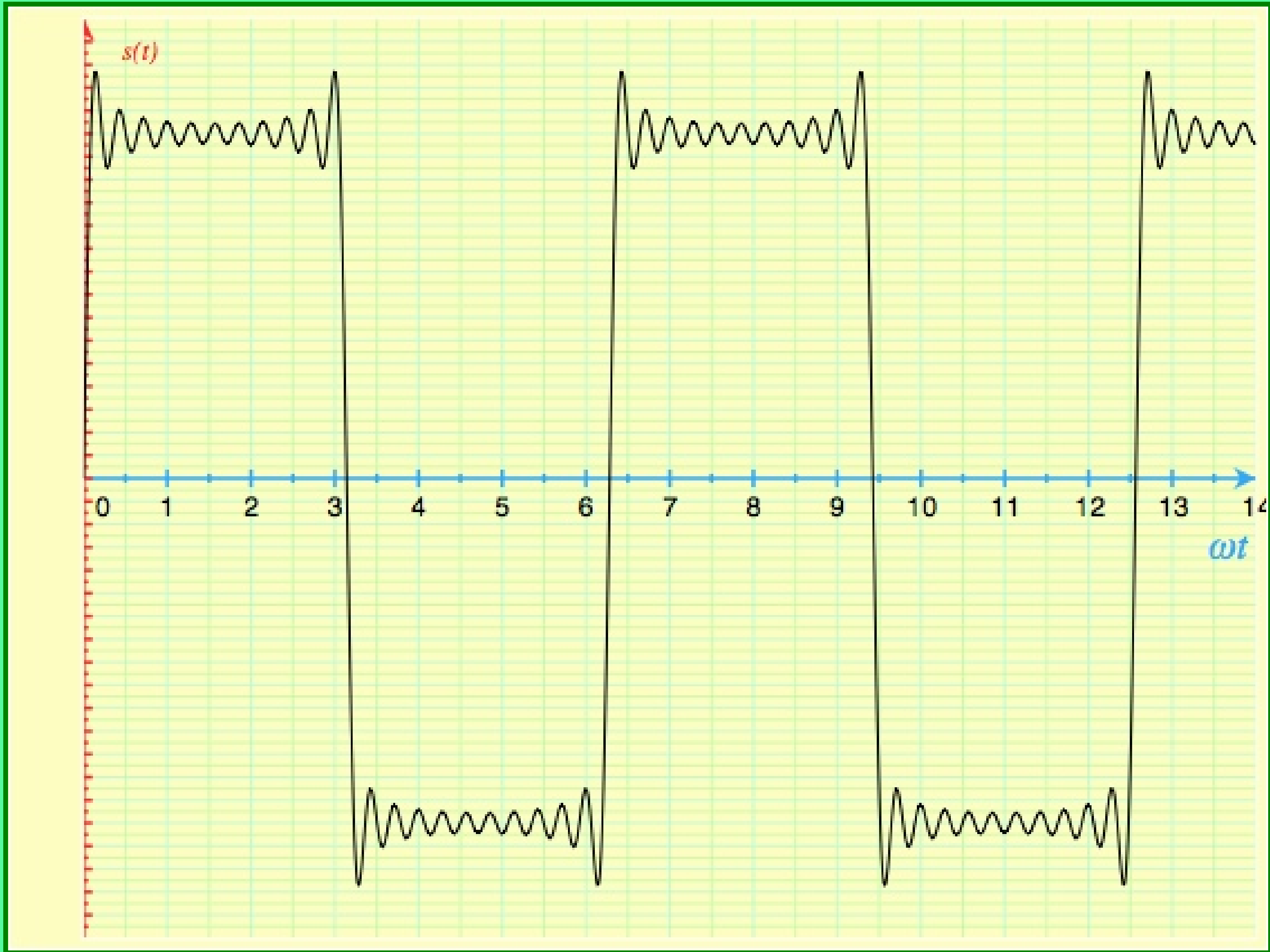
Caractérisation d'un signal périodique

Signal carré : 5 premiers harmoniques (rang 11)



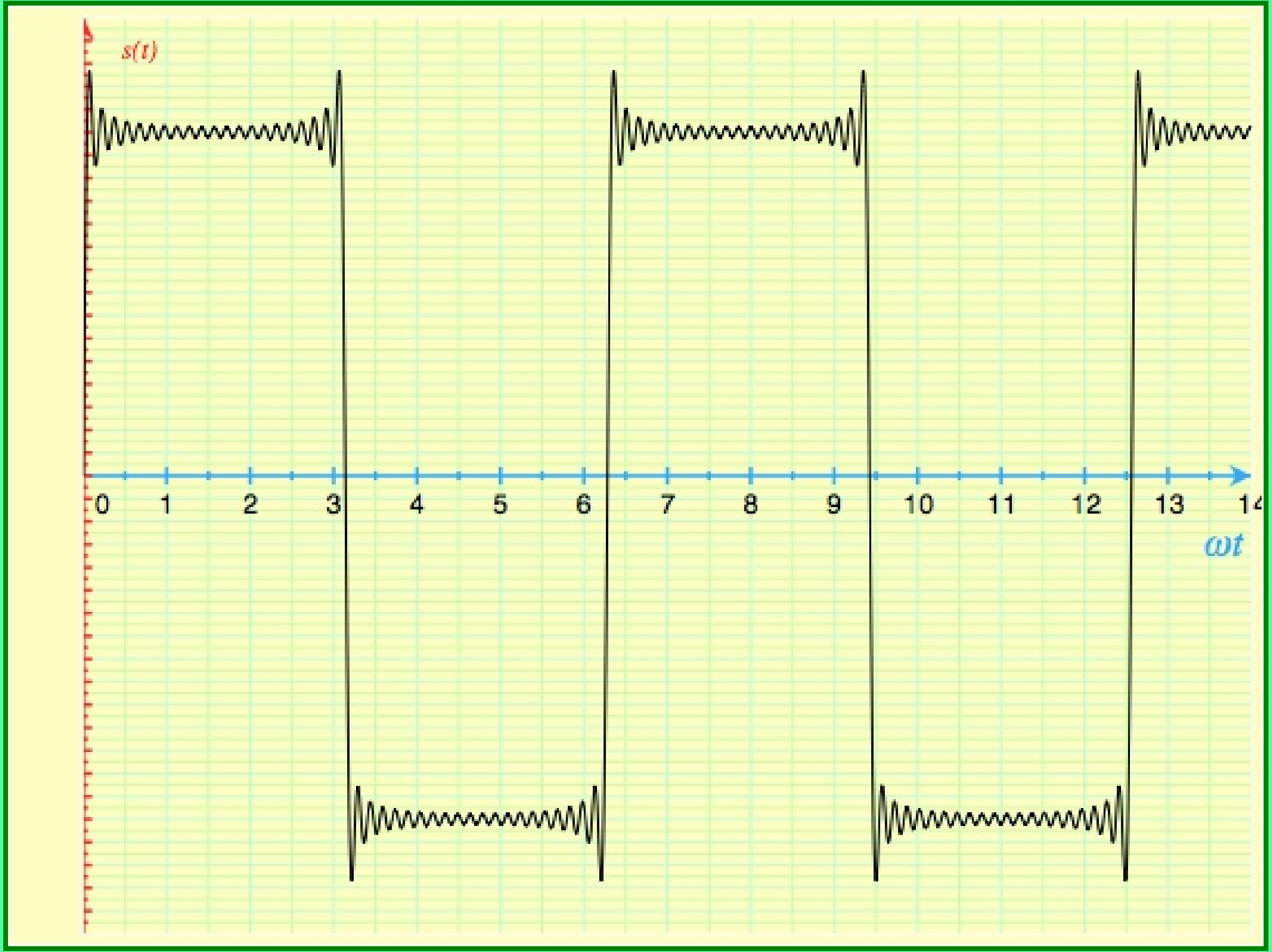
Caractérisation d'un signal périodique

Signal carré : 10 premiers harmoniques (rang 21)



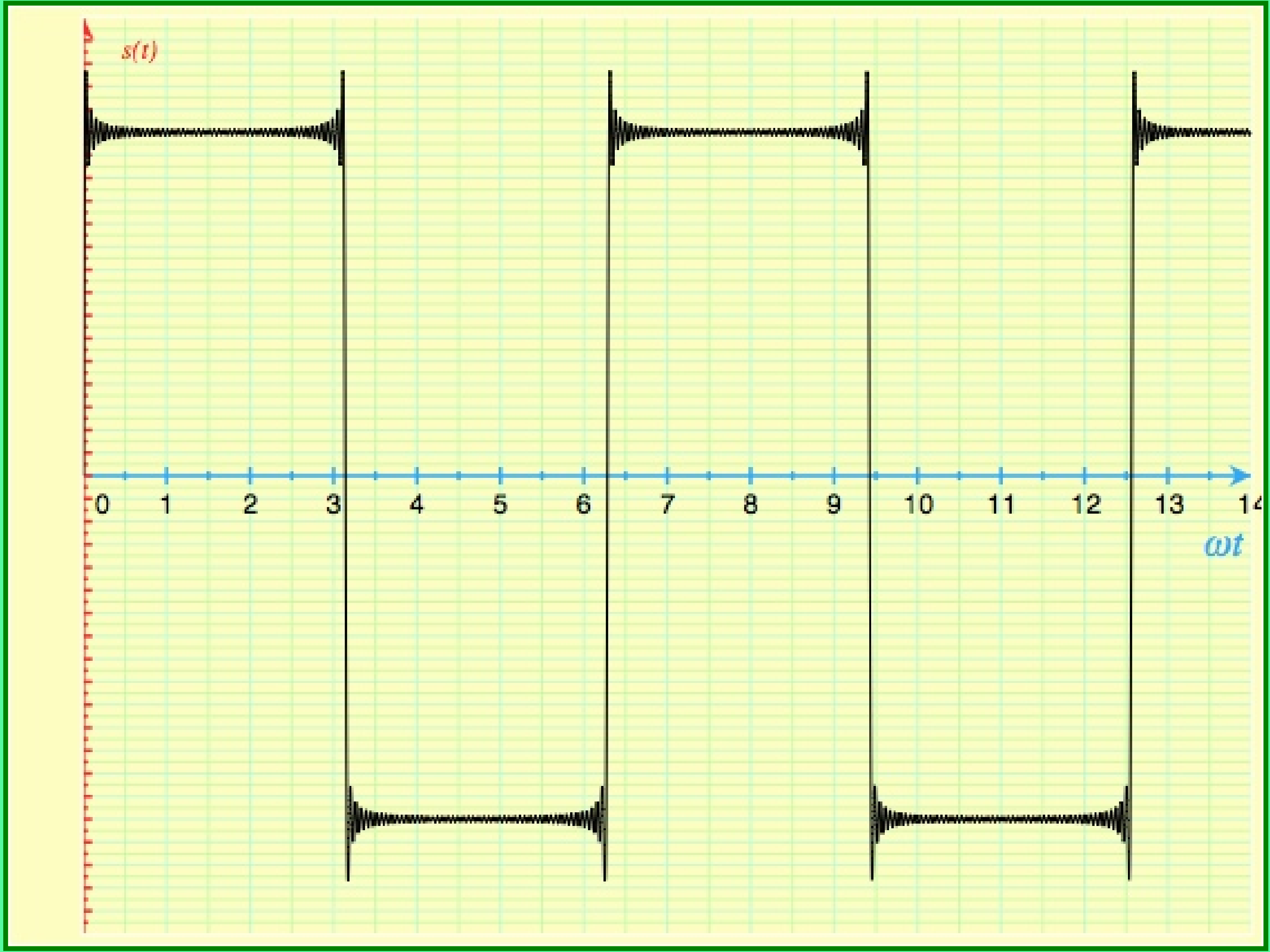
Caractérisation d'un signal périodique

Signal carré : 20 premiers harmoniques (rang 41)



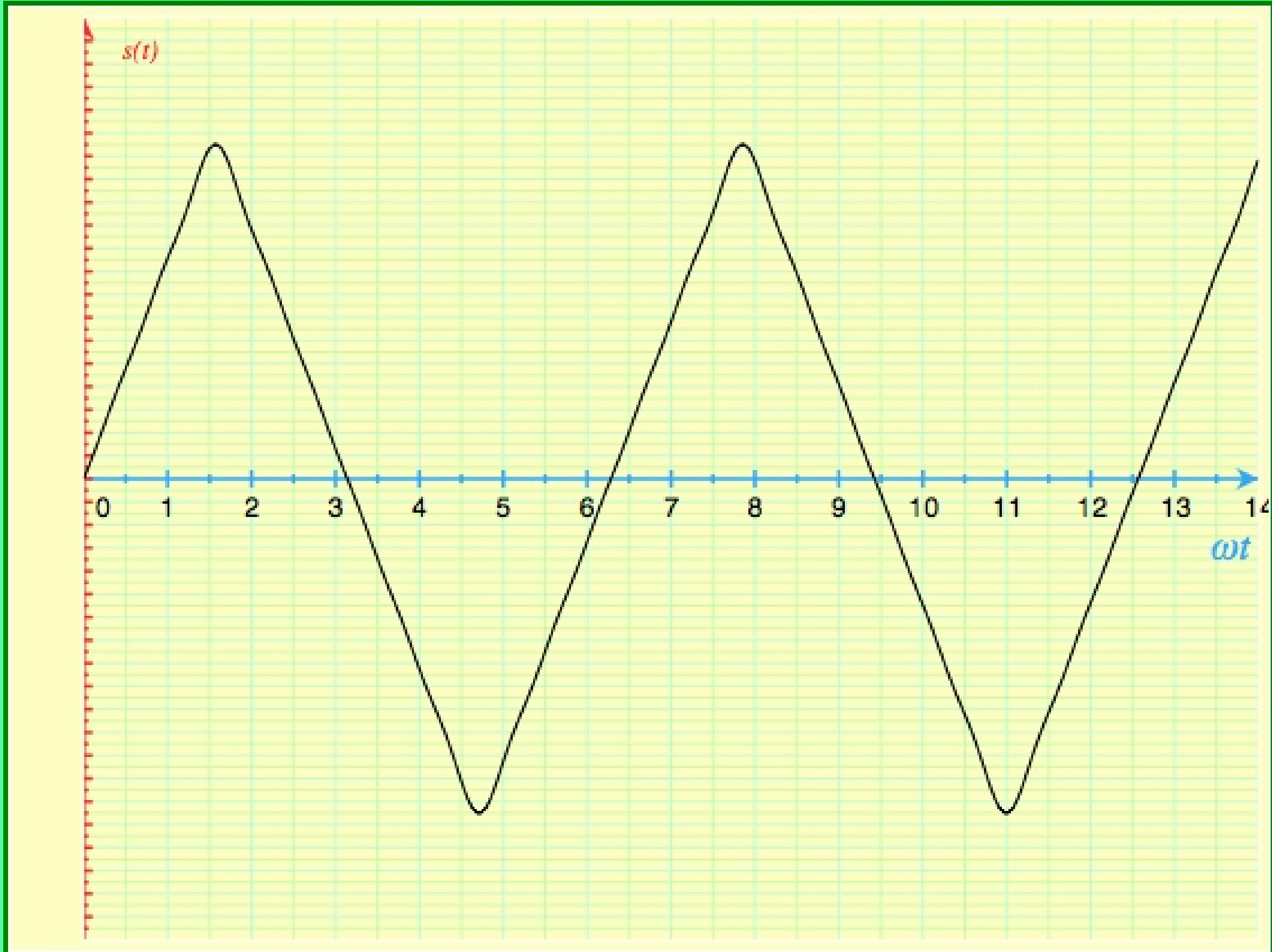
Caractérisation d'un signal périodique

Signal carré : 50 premiers harmoniques (rang 101)



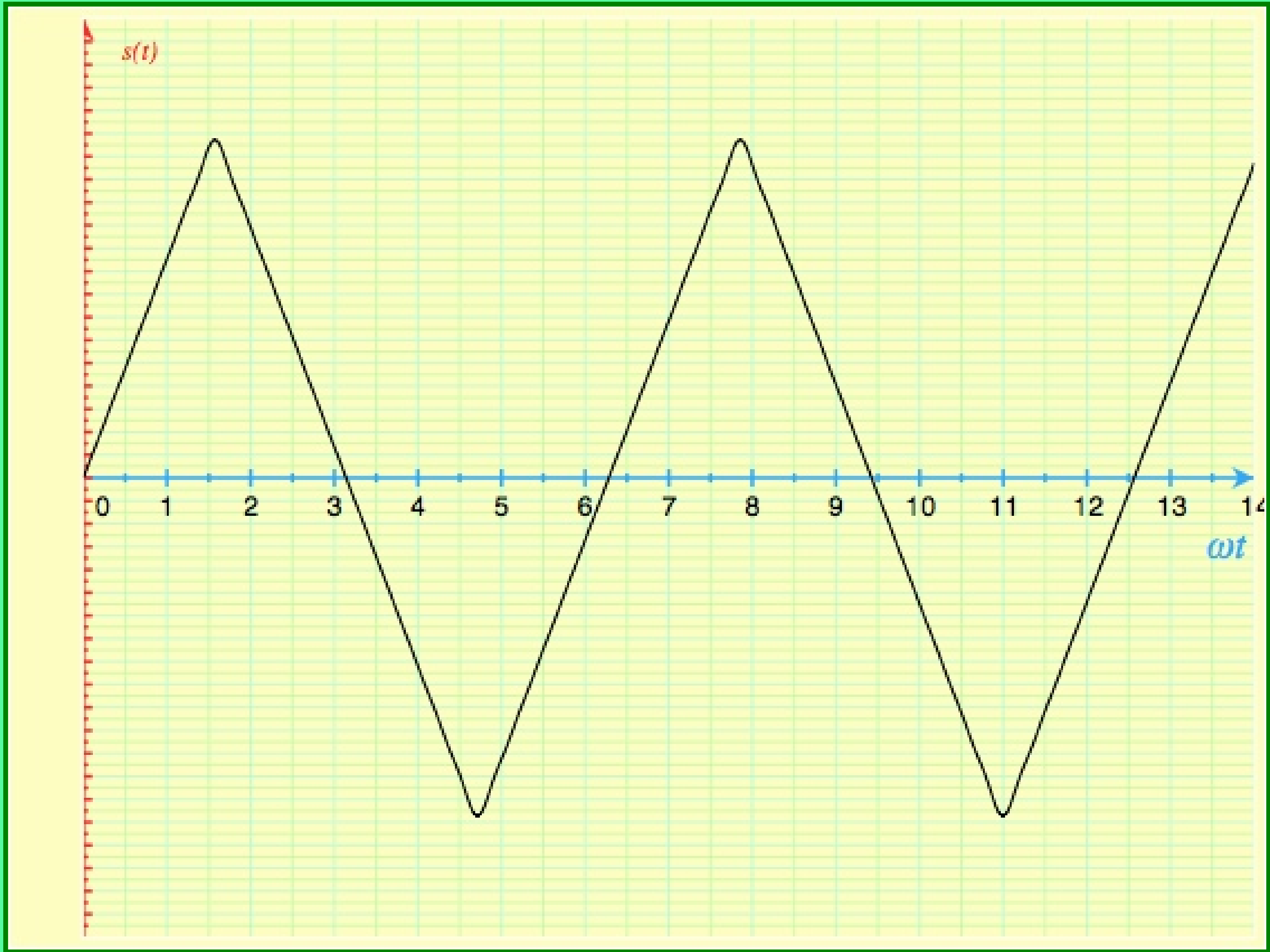
Caractérisation d'un signal périodique

Dent de scie : 5 premiers harmoniques (rang 11)



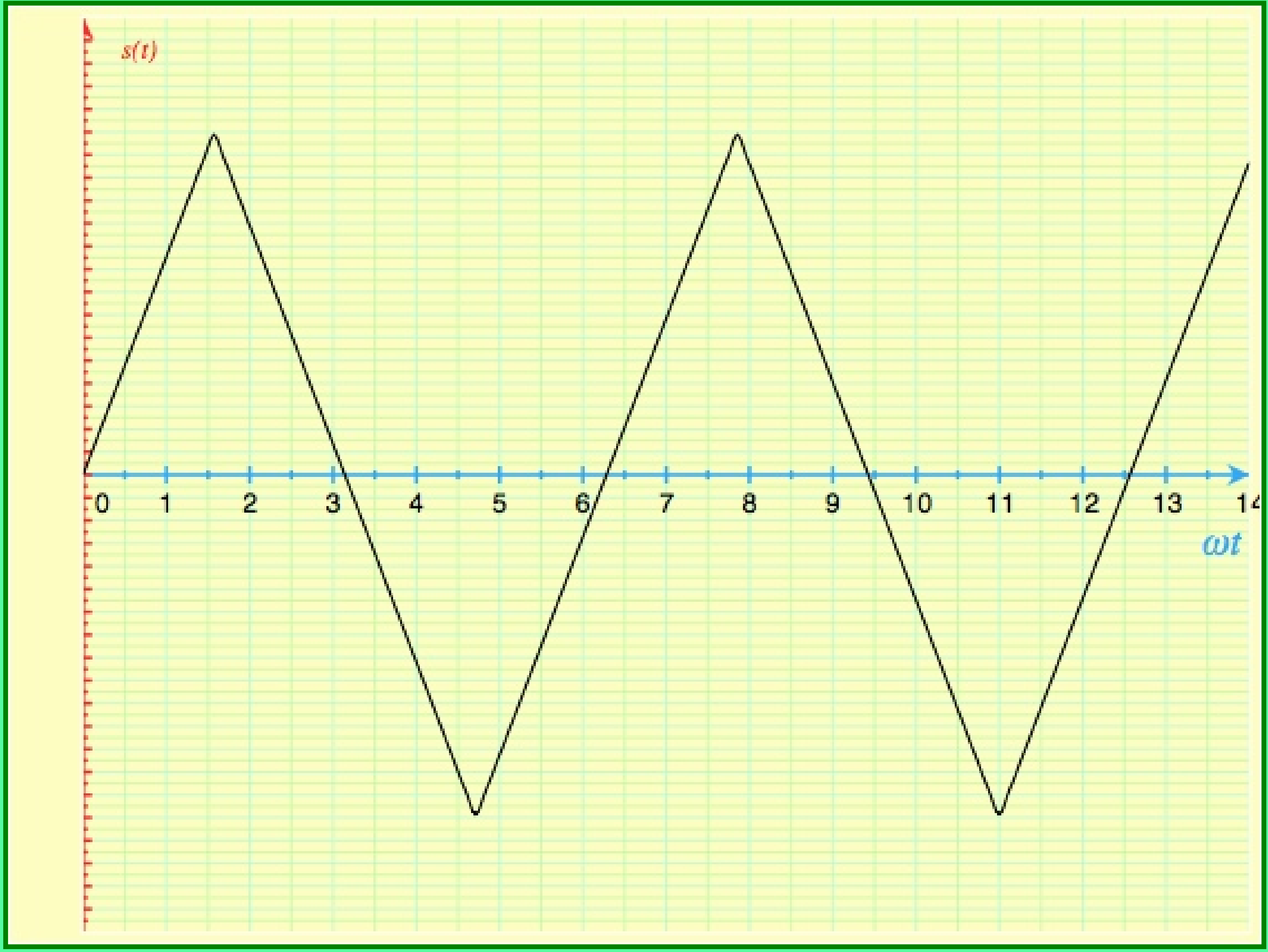
Caractérisation d'un signal périodique

Dent de scie : 10 premiers harmoniques (rang 21)



Caractérisation d'un signal périodique

Dent de scie : 20 premiers harmoniques (rang 41)



Caractérisation d’un signal périodique

Dent de scie : 50 premiers harmoniques (rang 101)